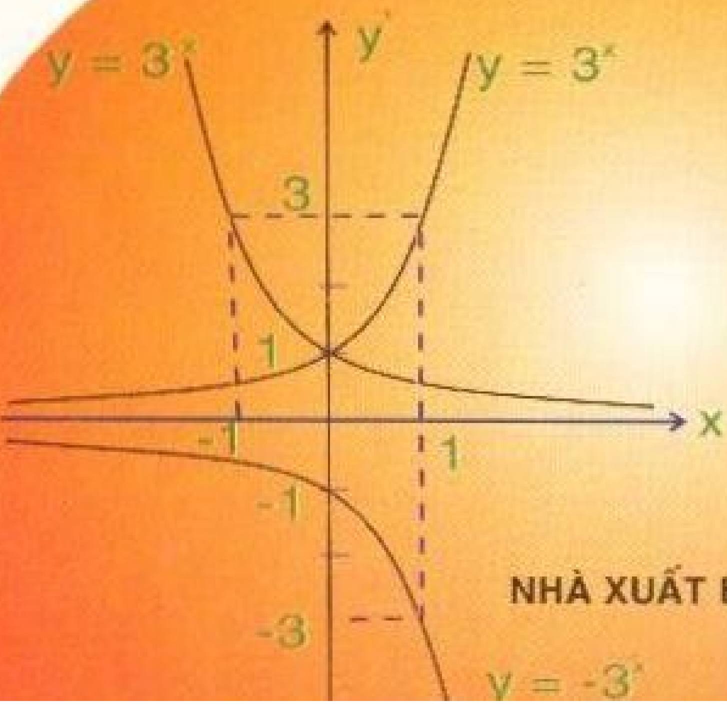
LÊ BÍCH NGỌC *(chủ biên)* - LÊ HỒNG ĐỨC

HỌC VÀ ÔN TẬP TOÁN

Đại số & Giải tích

11

(Tái bản lần thứ nhất)



(Dùng cho học sinh ban A và luyện thi Đại học)

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

LÊ BÍCH NGỌC(Chủ biên)
LÊ HỒNG ĐỨC

HỌC VÀ ÔN TẬP TOÁN
ĐẠI SỐ & GIẢI TÍCH
11

Biên soạn theo SGK mới của Bộ Giáo duc & Đào tạo
Dùng cho học sinh ban A và luyện thi Đại học

(Tái bản lần thứ nhất)

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
16 Hàng Chuối – Hai Bà Trưng – Hà Nội
Điện thoại: (04) 39714896; (04) 39724770. Fax: (04)3 971 4899

* * *

Chịu trách nhiệm xuất bản:

Giám đốc: PHÙNG QUỐC BẢO

Tổng biên tập: PHẠM THỊ TRÂM

Biên tập: NGUYỄN TRỌNG HẢI

Sửa bài: THÁI VĂN

Chế bản: Nhà sách HỒNG ÂN

Trình bày bìa: THÁI HỌC

Thực hiện liên kết: **Nhà sách HỒNG ÂN**

SÁCH LIÊN KẾT

HỌC VÀ ÔN TẬP TOÁN ĐẠI SỐ & GIẢI TÍCH 11

Mã số: 1L - 467ĐH2010

In 1.000 cuốn, khổ 16 × 24cm tại Công ti TNHH In Bao Bì Phong Tân - TP. Hồ Chí Minh.

Số xuất bản: 810 - 2010/CXB/19 - 143/ĐHQGHN, ngày 13/8/2010

Quyết định xuất bản số: 464LK-TN/QĐ - NXBĐHQGHN.

In xong và nộp lưu chiểu quý III năm 2010.

GIỚI THIỆU CHUNG

Xin trân trọng giới thiệu tới bạn đọc bộ sách:

HỌC VÀ ÔN TẬP

TOÁN

do nhóm Cự Môn dưới sự phụ trách của Thạc sĩ Toán học – Kĩ sư Tin học Lê Hồng Đức biên soạn.

Bộ sách gồm 8 cuốn:

Cuốn 1 : Học và ôn tập Toán - Hình học 10
Cuốn 2 : Học và ôn tập Toán - Đại số 10
Cuốn 3 : Học và ôn tập Toán - Lượng giác 11
Cuốn 4 : Học và ôn tập Toán - Hình học 11
Cuốn 5 : Học và ôn tập Toán - Đại số và Giải tích 11
Cuốn 6 : Học và ôn tập Toán - Hình học 12
Cuốn 7 : Học và ôn tập Toán - Giải tích 12
Cuốn 8 : Học và ôn tập Toán - Đại số tổ hợp 12

Mục tiêu của bộ sách này là cung cấp cho các thầy, cô giáo một bộ bài giảng chuyên sâu có chất lượng và cho các em học sinh Trung học phổ thông yêu thích môn Toán một bộ sách học tập bổ ích.

Bộ sách được viết trên một tư tưởng hoàn toàn mới mẻ, có tính sư phạm, có tính tổng hợp cao, tận dụng được đầy đủ thế mạnh của các phương pháp đặc biệt để giải Toán.

Bộ sách này chắc chắn phù hợp với nhiều đối tượng bạn đọc từ các thầy, cô giáo đến các em Học sinh lớp 10, 11, 12 và các em chuẩn bị dự thi môn Toán Tốt nghiệp PTTH hoặc vào các Trường Đại học.

Cuốn

HỌC VÀ ÔN TẬP TOÁN
ĐẠI SỐ VÀ GIẢI TÍCH 11

do Lê Bích Ngọc chủ biên được chia thành 4 chương:

Chương I: Tổ hợp và xác suất
Chương II: Dãy số – Cấp số cộng và cấp số nhân
Chương III: Giới hạn
Chương IV: Đạo hàm

bao gồm 16 chủ đề, miêu tả chi tiết phương pháp giải cho 93 dạng toán cơ bản và nâng cao của Đại số và Giải tích 11.

Cuối cùng, cho dù đã rất cố gắng, nhưng thật khó tránh khỏi những thiếu sót bởi những hiểu biết và kinh nghiệm còn hạn chế, rất mong nhận được những ý kiến đóng góp quý báu của bạn đọc gần xa. Mọi ý kiến đóng góp xin liên hệ tới:

Nhóm Cự Môn
Số nhà 20 - Ngõ 86 - Đường Tô Ngọc Vân - Quận Tây Hồ -Hà Nội

Hà nội, ngày 2 tháng 9 năm 2005

Thay mặt nhóm tác giả LÊ HỒNG ĐỨC

CHƯƠNG I
TỔ HỢP VÀ XÁC SUẤT

CHỦ ĐỀ 1
HAI QUY TẮC ĐẾM CƠ BẢN

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. QUY TẮC CỘNG

1.1. Định nghĩa

Để làm quen với quy tắc cộng, chúng ta sẽ bắt đầu với ví dụ sau:

Thí dụ 1: Giả sử cần chọn hoặc là một học sinh nam của khối 12 hoặc là một học sinh nữ của khối 11 làm đại biểu trong hội đồng của một trường THPT. Hỏi có bao nhiêu cách chọn vị đại biểu này nếu khối 12 có 81 học sinh nam và khối 11 có 72 học sinh nữ ?

Giải

Ta gọi:

- Việc thứ nhất là việc chọn một học sinh nam của khối 12, nó có thể làm bằng 81 cách.
- Việc thứ hai là việc chọn một học sinh nữ của khối 11, nó có thể làm bằng 72 cách.

Theo quy tắc cộng có:

$$81 + 72 = 153$$

cách chọn vị đại diện này.

Như vậy, ta có thể tóm tắt ***quy tắc cộng*** như sau:

Giả sử có hai công việc:

- *Việc thứ nhất có thể làm bằng n_1 cách*
- *Việc thứ hai có thể làm bằng n_2 cách*

và nếu hai việc này không thể làm đồng thời, khi đó sẽ có:

$n_1 + n_2$ cách làm một trong hai việc trên.

Quy tắc cộng dạng tổng quát:

Giả sử các việc $T_1, T_2, ..., T_m$ có thể làm tương ứng bằng $n_1, n_2..., n_m$ cách và giả sử không có hai việc nào có thể làm đồng thời. Khi đó, số cách làm một trong m việc đó là:

$$n_1 + n_2 + ... + n_m.$$

Quy tắc cộng mở rộng có thể chứng minh bằng quy nạp toán học từ quy tắc cộng cho hai tập hợp.

1.2. Biểu diễn dưới dạng tập hợp

Quy tắc cộng thường được phát biểu bằng ngôn ngữ tập hợp như sau:

1. Nếu X, Y là hai tập hữu hạn, không giao nhau, thì:

$$|X + Y| = |X| + |Y|.$$

2. Nếu $X_1, X_2, ..., X_n$ là n tập hữu hạn, từng đôi một không giao nhau, thì:

$$|X + X_2 + ... + X_n| = |X_1| + |X_2| + ... + |X_n|.$$

3. Nếu X, Y là là hai tập hữu hạn và $X \subseteq Y$, thì:

$$|\overline{X}| = |Y \setminus X| = |Y| - |X|.$$

2. QUY TẮC NHÂN

2.1. Định nghĩa

Để làm quen với quy tắc nhân, chúng ta sẽ bắt đầu với ví dụ sau:

Thí dụ 2: Để lập hồ sơ thi tuyển vào đại học, mỗi thí sinh cần thực hiện hai việc:

1. Thứ nhất, chọn trường thi, có tất cả 33 trường.
2. Thứ hai, chọn khối thi, mỗi trường có 4 khối thi là A, B, C, D.

Hỏi có bao nhiêu cách lập hồ sơ ?

Giải

Ta thấy ngay, có 33 cách chọn trường thi và ứng với mỗi cách chọn trường đó, có 4 cách chọn khối để thi.

Do đó, có tất cả:

$33 \times 4 = 132$ cách lập hồ sơ.

Như vậy, ta có thể tóm tắt ***quy tắc nhân*** như sau:

Giả sử, để hoàn thành một nhiệm vụ H cần thực hiện hai công việc nhỏ là H_1 và H_2, trong đó:

- *H_1 có thể làm bằng n_1 cách*
- *H_2 có thể làm bằng n_2 cách, sau khi đã hoàn thành công việc H_1.*

Khi đó, để thực hiện H sẽ có:

$$n_1 n_2 \text{ cách.}$$

Quy tắc nhân dạng tổng quát:

Giả sử, để hoàn thành một nhiệm vụ H cần thực hiện k công việc nhỏ là H_1, H_2, ..., H_k một cách liên tiếp, trong đó:

- *H_1 có thể làm bằng n_1 cách*
- *H_2 có thể làm bằng n_2 cách, sau khi đã hoàn thành công việc H_1.*
- ...
- *H_k có thể làm bằng n_k cách, sau khi đã hoàn thành công việc H_{k-1}.*

Khi đó, để thực hiện H sẽ có:

$$n_1 \times n_2 \times \ldots \times n_k \text{ cách.}$$

Quy tắc nhân mở rộng này, có thể chứng minh bằng quy nạp toán học từ quy tắc nhân cho hai công việc.

2.2.2. Biểu diễn quy tắc nhân dưới dạng tập hợp

Quy tắc nhân thường được phát biểu bằng ngôn ngữ tập hợp như sau:

Nếu $A_1, A_2, ..., A_m$ là các tập hữu hạn, khi đó số phần tử của tích Đề - các của các tập này bằng tích của số các phần tử của mọi tập thành phần. Để liên hệ với quy tắc nhân hãy nhớ là việc chọn một phần tử của tích Đề - các $A_1 \times A_2 \times ... \times A_m$ được tiến hành bằng cách chọn lần lượt một phần tử của A_1 một phần tử của A_2, ..., một phần tử của A_m. Theo quy tắc nhân ta nhận được đẳng thức:

$$|A_1 \times A_2 \times ... \times A_m| = |A_1| . |A_2| ... |A_m|.$$

3. NGUYÊN LÝ BÙ TRỪ

Khi hai công việc có thể được làm đồng thời, chúng ta không thể dùng quy tắc cộng để tính số cách thực hiện nhiệm vụ gồm cả hai việc. Cộng số cách làm mỗi việc sẽ dẫn đến sự trùng lặp, vì những cách làm cả hai việc sẽ được tính hai lần . Để tính đúng số cách thực hiện nhiệm vụ này ta cộng số cách làm mỗi một trong hai việc rồi trừ đi số cách làm đồng thời cả hai việc. Đó là nguyên lý bù trừ.

Biểu diễn dưới dạng tập hợp: Chúng ta có thể phát biểu nguyên lý bù trừ bằng ngôn ngữ tập hợp như sau:

Cho A_1, A_2 là các tập hợp. Gọi T_1 là việc chọn một phần tử của A_1 còn T_2 là việc chọn một phần tử của A_2.

- Có $|A_1|$ cách làm việc T_1
- Có $|A_2|$ cách làm việc T_2.

Số cách làm hoặc T_1 hoặc T_2 bằng tổng số cách làm việc T_1 và số cách làm việc T_2 trừ đi số cách làm cả hai việc. Vì có $|A_1 \cup A_2|$ cách làm hoặc T_1 hoặc T_2, và có $|A_1 \cap A_2|$ cách làm cả hai việc T_1 và T_2 nên chúng ta có:

$$|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|.$$

Đó chính là công thức đưa ra để xác định số các phần tử của hợp hai tập hợp. Nguyên lý bù trừ có thể tổng quát hoá để tìm số cách thực hiện nhiệm vụ gồm n việc khác nhau, hoặc là tìm số phần tử của hợp n tập hợp với n là số nguyên dương.

Định lý 1: Cho $A_1, A_2, ..., A_n$ là các tập hữu hạn, khi đó:

$$|A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n| = \sum_{1 \le i \le n} |A_i| - \sum_{1 \le i \le j \le n} |A_i \cap A_j|$$

$$+ \sum_{1 \le i \le j \le n} |A_i \cap A_j \cap A_k| - ... + (-1)^{n+1} |A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n|.$$

Nguyên lý bù trừ cho ta công thức tính số phần tử của hợp n tập hợp với mọi n nguyên dương. Nó gồm có $2^n - 1$ số hạng.

Thí dụ 3: Lớp toán rời rạc có 25 sinh viên giỏi tin học, 13 sinh viên giỏi toán và 8 sinh viên giỏi cả toán và tin học. Hỏi trong lớp này có bao nhiêu sinh viên, nếu mỗi sinh viên hoặc giỏi toán hoặc giỏi tin học giỏi cả hai môn?

Giải

Gọi A là tập các sinh viên giỏi tin học và B là tập các sinh viên giỏi toán. Khi đó $A \cap B$ là tập các sinh viên giỏi cả toán và tin học.

Vì mỗi sinh viên trong lớp hoặc giỏi toán giỏi tin hoặc giỏi cả hai môn, nên ta suy ra số sinh viên trong lớp là $|A \cup B|$.

Do vậy:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 25 + 13 - 8 = 30$$

II. CÁC DẠNG TOÁN LIÊN QUAN

Bài toán 1: Sử dụng các quy tắc để thực hiện bài toán đếm phương án.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

1. Để sử dụng quy tắc cộng trong bài toán đếm, ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Phân tách các phương án thành k nhóm độc lập với nhau:

$$H_1, H_2, ..., H_k.$$

Bước 2: Nếu:

- H_1 có n_1 cách khác nhau.
- H_2 có n_2 cách khác nhau.

...

- H_k có n_k cách khác nhau.

Bước 3: Khi đó, ta có tất cả:

$$n_1 + n_2 + ... + n_k \text{ phương án.}$$

2. Để sử dụng quy tắc nhân trong bài toán đếm, ta thực hiện theo các bước:

Ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Phân tách một hành động H thành k công việc nhỏ liên tiếp:

$$H_1, H_2, ..., H_k.$$

Bước 2: Nếu ta có:

- n_1 cách khác nhau để thực hiện H_1.
- Một khi thực hiện xong H_1, ta có n_2 cách thực hiện H_2.

...

- Một khi thực hiện xong $H_1, H_2, ..., H_{k-1}$, ta có n_k cách thực hiện H_k.

Bước 3: Khi đó ta có tất cả:

$$n_1 \times n_2 \times ... \times n_k \text{ cách để thực hiện hành động H.}$$

Ví dụ 1: Ở Việt Nam, mọi học sinh đã tốt nghiệp THPT đều có quyền dự thi vào một trường đại học (có 35 trường) hoặc một trường cao đẳng (có 25 trường) hoặc một trường trung học chuyên nghiệp (có 21 trường). Hỏi mỗi học sinh đã tốt nghiệp THPT có bao nhiêu cách chọn trường thi ?

Giải

Ta thấy ngay:

- Có 35 cách chọn trường đại học.
- Có 25 cách chọn trường cao đẳng.
- Có 21 cách chọn trường trung học chuyên nghiệp.

Và khi đã chọn thi trường đại học thì không chọn trường thi là cao đẳng và trung học chuyên nghiệp, tương tự với cao đẳng và trung học chuyên nghiệp, do đó có tất cả:

$35 + 25 + 21 = 81$ cách chọn trường thi.

Chú ý: Nhiều bài toán đếm phức tạp không thể giải được nếu chỉ sử dụng hoặc quy tắc cộng hoặc quy tắc nhân. Nhưng chúng có thể giải được nếu sử dụng cả hai quy tắc này. Ví dụ tiếp theo sẽ minh hoạ điều này.

Ví dụ 2: Trong một phiên bản của ngôn ngữ lập trình BASIC, tên một biến là một xâu chứa một hoặc hai chữ số hoặc chữ cái, trong đó không phân biệt chữ in thường và chữ in hoa. Hơn thế nữa tên biến bắt đầu bằng một chữ cái và phải khác với năm xâu hai ký tự dành riêng. Có bao nhiêu tên biến khác nhau trong phiên bản này của BASIC.

Giải

Gọi V là số các tên khác nhau trong phiên bản này của BASIC, V_1 là số các tên gồm 1 ký tự, V_2 là số các tên gồm 2 ký tự.

Khi đó theo quy tắc cộng, ta có:

$$V = V_1 + V_2.$$

Ta có ngay $V_1 = 26$, vì tên biến một ký tự thì nhất thiết phải là chữ cái.

Để tính V_2 ta thấy:

- Ký tự đầu là chữ cái (chọn một trong 26 chữ cái).
- Ký tự thứ hai có thể là chữ cái hoặc chữ số (chọn một trong 26 chữ cái và 10 chữ số). Nhưng cần phải bớt đi 5 xâu dành riêng.

Do đó:

$$V_2 = 26.36 - 5 = 931.$$

Vì vậy, có

$$V = V_1 + V_2 = 26 + 931 = 957$$

tên biến khác nhau trong phiên bản này của BASIC.

Ví dụ 3: Mỗi người sử dụng hệ thống máy tính đều có mật khẩu dài từ sáu tới tám ký tự, trong đó mỗi ký tự là một chữ hoa hay chữ số. Mỗi mật khẩu phải chứa ít nhất một chữ số. Hỏi có bao nhiêu mật khẩu ?

Giải

Gọi P là tổng số mật khẩu có thể và P_6, P_7, P_8 tương ứng là số mật khẩu dài 6, 7, 8 ký tự.

Theo quy tắc cộng ta có:

$$P = P_6 + P_7 + P_8.$$

Bây giờ chúng ta sẽ tính P_6, P_7, P_8.

- Tính trực tiếp P_6 sẽ rất khó. Để tìm P_6 dễ hơn ta tính số các xâu dài 6 ký tự là các chữ in hoa hoặc chữ số, rồi bớt đi số các xâu dài 6 ký tự là các chữ in hoa và không chứa chữ số nào. Theo quy tắc nhân số các xâu dài 6 ký tự là 36^6 và số các xâu không chứa các chữ số là 26^6. Vì vậy

$$P_6 = 36^6 - 26^6 = 1867866560.$$

- Hoàn toàn tương tự ta có:

$$P_7 = 36^7 - 26^7 = 70332353920.$$

$$P_8 = 36^8 - 26^8 = 2612282842\,880.$$

Vậy, ta được:

$$P = P_6 + P_7 + P_8 = 2684\,483063360.$$

Ví dụ 4: Có nhiều nhất bao nhiêu biển đăng ký xe máy nếu mỗi biển chứa một dãy gồm một chữ cái tiếp đến một chữ số khác 0 và cuối cùng là năm chữ số.

Giải

Ta nhận thấy, mỗi biển số xe máy có dạng:

Ô1	Ô2	Ô3	Ô4	Ô5	Ô6

trong đó:

- Để điền vào Ô1, có thể chọn 1 trong 26 chữ cái, do đó có 26 cách điền.
- Để điền vào Ô2, có thể chọn 1 trong 9 chữ số (đó là 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9), do đó có 9 cách điền.
- Để điền vào Ô3, có thể chọn 1 trong 10 chữ số (đó là 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9), do đó có 10 cách điền.
- Để điền vào Ô4, có thể chọn 1 trong 10 chữ số (đó là 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9), do đó có 10 cách điền.
- Để điền vào Ô5, có thể chọn 1 trong 10 chữ số (đó là 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9), do đó có 10 cách điền.
- Để điền vào Ô6, có thể chọn 1 trong 10 chữ số (đó là 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9), do đó có 10 cách điền.

Do đó, có tất cả:

$26 \times 9 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 2340000$ biển đăng ký xe.

Ví dụ 5: Một lớp học có 33 sinh viên. Hỏi có bao nhiêu cách chọn ra một tổ liên lạc gồm 3 người (lớp trưởng, lớp phó, bí thư), biết rằng sinh viên nào cũng có thể được chọn ?

Giải

Với giả thiết sinh viên nào cũng có thể được chọn, do đó:

- Có 33 cách giao chức danh lớp trưởng.
- Sau khi đã giao chức danh lớp trưởng thì mỗi sinh viên trong 32 sinh viên còn lại có thể nhận chức danh lớp phó, do đó có 32 cách giao chức danh lớp phó.
- Sau khi đã giao các chức danh lớp trưởng và lớp phó thì mỗi sinh viên trong 31 sinh viên còn lại có thể nhận chức danh bí thư, do đó có 31 cách giao chức danh bí thư.

Vậy, có tất cả:

$33 \times 32 \times 31 = 32736$ cách

giao ba chức danh lớp trưởng, lớp phó, bí thư cho 33 sinh viên.